И. И. ВЕДЯКОВ
доктор технических наук, профессор, директор ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, АО «НИЦ «Строительство»

В. К. ВОСТРОВ
доктор технических наук, ООО «Кимрское объединение ВНИПИморнефтегаз»

УДК 624.04

ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л.С. ПОНТРЯГИНА И АВАРИЙНЫЕ СЕЙСМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

Предложены способы определения особых и аварийных сейсмических нагрузок и аварийных расчетных ситуаций, требуемых в соответствии с действующим законодательством. Уточнен предложенный ранее способ описания движений сооружения с помощью нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и существовании для них устойчивых предельных циклов, приводящих к возникновению стационарных периодических решений-автоколебаний. Показано, что задача выбора особого (аварийного) сейсмического воздействия сводится к задаче оптимального быстродействия, когда переход из одного крайнего положения сооружения в другое при внешнем сейсмическом воздействии совершается за минимальное время. Сформировано предложение о возможности применения в качестве максимального расчетного землетрясения в сейсмических районах особых (аварийных) гармонических сейсмических воздействий с особой частотой близкой к частоте собственных колебаний сооружения. Выделяются аварийные сейсмические горизонтальные нагрузки как нагрузки, создающие аварийную ситуацию. Приведен алгоритм определения особой частоты аварийных сейсмических воздействий, основанный на сопоставлении максимальных перемещений сооружений, возникающих при биениях и автоколебаниях.

Ключевые слова: *аварийная ситуация, автоколебания, острый резонанс, оптимальное управление, сейсмическое воздействие, аварийные нагрузки, особые частоты, биения сооружений.*

В ГОСТ 27751-2014 кроме постоянных, длительных и кратковременных выделены особые нагрузки, как нагрузки, создающие особые ситуации. В примечании отмечается, что особые воздействия подразделяются на нормируемые (например, сейсмические, в результате пожара) и аварийные воздействия (например, при взрыве, столкновении, аварии оборудования и отказе работы несущего элемента конструкции), которые не заданы в нормативных документах. При этом под аварийной ситуацией понимается ситуация, соответствующая исключительным условиям работы сооружения, в том числе, и при особых воздействиях, которые могут привести к существенным социальным, экологическим и экономическим потерям.

Несмотря на отнесение сейсмических нагрузок, как в отмененном ГОСТ Р 54257-2010, так и во вновь введенном ГОСТ 27754-2014 к нормируемым особым воздействиям, в своде правил СП 14.13330-2014 не выделены аварийные сейсмические нагрузки и аварийные расчетные ситуации, требуемые в п.6 статьи 16 Федерального закона №384-ФЗ. Также требуется уточнение определения особых сейсмических нагрузок, к которым в ГОСТ 27754-2014 отнесены все сейсмические нагрузки.

Острый резонанс и особые сейсмические нагрузки

В работах [1-2] определены аварийные ситуации и аварийные сейсмические нагрузки для простейших типов сооружений, описываемых одномерным дифференциальным уравнением второго порядка с вязким трением при горизонтальных сейсмических воздействиях:

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+F(y)=-m\ddot{U} \quad (1)$$

где y – перемещение сооружения относительно грунта, $v = \dot{y}$ – скорость перемещения, m – масса сооружения, c – коэффициент вязкого трения, F(y) – нелинейная восстанавливающая сила, $\ddot{U}$ – сейсмическое ускорение опорного основания. Если основание считается абсолютно жестким, то свободные колебания осциллятора будут консервативными, т. е., c = 0. При учете упругости и инертности основания и оттока в него энергии в уравнении (1) появляется диссипативный член пропорциональный скорости, т. е. c > 0.

Поскольку в начале землетрясения сооружение находится в состоянии покоя, то начальные условия при t = 0 будут равны y(0) = 0, $\dot{y}(0) = -\dot{U}(0)$. В случае линейной восстанавливающей силы F(y) = k·y, где k – коэффициент жесткости, уравнение (1) принимает вид:

$$\ddot{y}+2\varepsilon\dot{y}+\rho^2 y=-\ddot{U} \quad (2)$$

где ρ – собственная частота колебаний без учета затуханий, $\rho^2 = k/m$, ε – коэффициент затухания ε = c/(2m).

Уравнение (1) выведено в предположении, что опорные площадки совершают колебания по одной форме. Но существуют такие сооружения, как мосты с большими пролетами, трубопроводы, опирающиеся на две площадки в уровне разных этажей здания или на площадки в двух зданиях и др., которые при землетрясениях подвержены разным возмущениям на каждой опоре [3-4]. Для таких сооружений уравнение колебаний массы m с линейной восстанавливающей силой имеет вид:

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+k\cdot y=-m(\ddot{U}_1+\ddot{U}_2) \quad (3)$$

где $y = z_1+z_2$, y – суммарные перемещения сооружения, расположенного на опорных площадках 1, 2 в зафиксированной в пространстве системе координат; $z_{1,2}$ – относительные перемещения сооружения на первой и второй опорах соответственно, $z_1 = y-U_1$, $z_2 = y-U_2$, $U_{1,2}$–перемещения грунта в опорных площадках 1,2 в зафиксированной в пространстве системе координат.

Сейсмический расчет такой конструкции или подконструкции, расположенной внутри здания, либо с опорами в разных зданиях, обладает существенными особенностями, так как законы колебаний на разных опорах неодинаковы и нагрузки на конструкцию складываются из двух составляющих – инерционной, создаваемой ускоренным движением опор и статической, вызываемой их взаимным перемещением.

Типы землетрясений и колебания грунта

Говоря о землетрясениях, различают [5,6] отдельные толчки, достаточно продолжительные колебания малой амплитуды и движения грунта большой продолжительности (от нескольких секунд до нескольких десятков секунд) с резко выраженным преобладанием некоторых периодов колебаний.

Первый случай типичен для слабых землетрясений и областей, расположенных вблизи эпицентра. Второй случай типичен для результатов отдаленных сильных землетрясений (распределение энергии между широким диапазоном периодов колебаний (порядка 0.05-0.5 или 2.5-6 сек.) в среднем равномерное). Движения грунта для второго случая почти одинаковы во всех направлениях и близки к белому шуму. Третий случай представляет наибольший интерес, так как в нем резко выражены преобладания определенных периодов колебаний и именно эти землетрясения приводят к наиболее разрушительным последствиям.

К первому типу землетрясений вследствие его простоты могут быть применимы детерминистические методы. Разрушительные землетрясения, представляющие один толчок, отличаются [6] характером разрушений, указывающим на движение грунта почти точно вдоль одного направления, причем, в одну сторону более сильное, чем в другую. Если разложить энергию движения в соответствии с вызываемой ею частотой колебаний, то выявилось бы преобладание колебаний с коротким периодом (порядка 0.2 сек. и менее).

Наибольшее внимание привлекли движения по спектрам близкие к белому шуму, т. е. движения второго типа. Это объясняется их относительной распространенностью, наличием большого числа инструментальных записей, а так же простотой аналитического исследования. Для представления сейсмических движений предлагались различные способы аппроксимации, начиная от задания ускорения грунта в виде стационарного белого шума или представления ускорения грунта в виде реализаций стационарных случайных процессов, модулированных при помощи некоторых функций времени – квазиогибающих процесса [5,6].

Третий тип землетрясений возникает при прохождении колебаний, вызванных движением первого или второго типа через линейный грунтовый фильтр. Поэтому он, также как и первые два типа, может быть исследован аналитически, так же как и второй тип с помощью представлений ускорений грунта в виде реализаций стационарных случайных процессов, модулированных квазиогибающими процесса. При этом для приложений представляют интерес модели стационарных случайных процессов, содержащих скрытую периодичность, т. е. когда реализации представляют собой колеблющиеся функции с медленно изменяющимися случайными амплитудами и фазами (узкополосные процессы).

При моделировании правой части уравнения (2) с линейной восстанавливающей силой стационарным случайным процессом получен, например [5], ряд кардинальных выводов. Для белого шума с интенсивностью F, состоящего из стационарной последовательности некоррелируемых импульсов, спектральная плотность Sy(ξ) выходного стационарного процесса y(t) определяется как постоянная величина F/(2π) и для среднего квадрата отклонений (дисперсии) получается выражение $\sigma_y^2 = F/(4\varepsilon\rho^2)$. Если диссипация в системе мала, то для дисперсии на выходе колебательной системы получается [5] приближенная формула $\sigma_y^2 \approx \pi S_q(\rho)/(2\varepsilon\rho^2)$, которая отличается от предыдущей формулы тем, что в нее входит значение спектральной плотности $S_q(\xi)$ входного процесса $\ddot{U}$ при ξ=ρ.

Этот результат имеет отчетливый механический смысл. Система (2) со случайным процессом $\ddot{U}$ в правой части реагирует лишь на те части спектра внешнего воздействия, частота которых близка к собственной частоте ρ.

Применение принципа максимума для одномерных линейных колебаний с однокомпонентным внешним воздействием

Сформулируем задачу выбора особого сейсмического воздействия, предложенного в [1,2] как задачу оптимального быстродействия, которая заключается в отыскании такого ускорения Ü основания, для которого фазовая траектория (y,v) соответствующая этому ускорению в силу уравнения (2), проходит через конечное состояние (y_1 ,v_1) и переход из начального состояния (y_0 ,v_0) в конечное реализуется за кратчайшее время t_q. Такое ускорение носит название оптимального в смысле быстродействия, а соответствующая траектория, по которой фазовая точка за кратчайшее время переходит из начального состояния при t = 0 в конечное при $t = t_q$, носит название оптимальной траектории [7].

Перепишем уравнение (2) в виде двух линейных уравнений первого порядка для фазовых координат

$$\dot{y}=v\ ,\ \dot{v}=-2\varepsilon v-\rho^2 y-\ddot{U} \quad (4)$$

с начальными условиями при t = 0:

$$y(0)=y_0\ ,\ v(0)=v_0 \quad (5)$$

При этом на сейсмическое периодическое ускорение основания налагается ограничение

$$|\ddot{U}| \le bg \quad (6)$$

где g – ускорение силы тяжести, b – показатель балльности данного микрорайона, его можно задавать, считая, что ожидаемое максимальное ускорение при возможном землетрясении равно b = max(Ü)/g, причем max(Ü) берется из акселерограмм. Величина показателя балльности может, также, выбираться на основе сейсмичности площадки строительства, определяемой по нормам СП 14.13330.2014, либо может находиться по результатам сейсмического микрорайонирования, которое является составной частью инженерных изысканий и выполняется с соблюдением требований соответствующих нормативных документов.

Для отыскания оптимального ускорения основания на основе принципа максимума [7] для уравнений (4) с начальными условиями (5) и ограничением (6) введем в рассмотрение функцию H, зависящую от переменных y, v, Ü и двух вспомогательных переменных $\psi_{1,2}$ по формуле

$$H=\psi_1 v-\psi_2(2\varepsilon v+\rho^2 y+\ddot{U})$$

С помощью этой функции запишем сопряженную к (4) систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных

$$\dot{\psi}_1=\rho^2\psi_2,\ \dot{\psi}_2=2\varepsilon\psi_2-\psi_1, \quad (7)$$

с произвольными начальными условиями в момент времени t = 0 :

$$\psi_1(0)=\psi_{10},\quad \psi_2(0)=\psi_{20} \quad (8)$$

Из уравнений (7) и начальных условий (8) следует сопряженное дифференциальное уравнение второго порядка для вспомогательной переменной ψ_2 :

$$\ddot{\psi}_2-2\varepsilon\dot{\psi}_2+\rho^2\psi_2=0 \quad (9)$$

с начальными условиями

$$\psi_2(0)=\psi_{20},\ \ \dot{\psi}_2(0)=2\varepsilon\psi_{20}-\psi_{10} \quad (10)$$

Решение уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям (10), представляет собой неограниченно растущие свободные при t > 0 колебания типа

$$\psi_2(t)=K_\psi \exp(\varepsilon t)\sin(\omega t+\alpha_\psi) \quad (11)$$

где ω – круговая частота с учетом затухания $\omega^2 = \rho^2-\varepsilon^2$,

$$K_\psi{}^2=\psi_{20}{}^2+((\varepsilon\psi_{20}-\psi_{10})/\omega)^2, \mathrm{tg}\alpha_\psi= =\omega\psi_{20}/(\varepsilon\psi_{20}-\psi_{10})$$

Зная нетривиальное решение ψ_2(t), найдем оптимальное ускорение Ü(t), удовлетворяющее критерию максимума

$$M(y,v,\psi_1,\psi_2)=\max(\psi_1 v-\psi_2(2\varepsilon v+\rho^2 y+\ddot{U})),$$

$$|\ddot{U}|\le bg$$

для любого момента времени $0\le t\le t_q$. Из этого критерия следует представление оптимального (в смысле быстродействия) ускорения в виде

$$\ddot{U}(t)=-bg\cdot \mathrm{sign}(\psi_2(t)) \quad (12)$$

и функция

$$M(y,v,\psi_1,\psi_2)=\psi_1 v-\psi_2(2\varepsilon v+\rho^2 y)+ bg\cdot|(\psi_2(t)|$$

которая должна быть неотрицательной для любого $0\le t\le t_q$. В частности, при t = 0 должно иметь место неравенство:

$$\psi_{10}v_0-\psi_{20}(2\varepsilon v_0+\rho^2 y_0)+ bg\cdot|\psi_{20}|\ge 0$$

Это неравенство будет удовлетворено, если разность первых двух слагаемых в нем будет равна нулю, т. е.

$$\psi_{20}=\psi_{10}\ \dot{y}_0/(2\varepsilon\dot{y}_0+\rho^2 y_0),$$

$$\mathrm{tg}\alpha_\psi=\omega\ \dot{y}_0/(\varepsilon\ \dot{y}_0+\rho^2 y_0)$$

Если движение начинается при t = 0 из точки (y_0,0) фазовой плоскости то $\mathrm{tg}\alpha_\psi = 0$, $\alpha_\psi = 0$, $K_\psi = \psi_{10}/\omega$ и начальные условия для функций y и ψ_2 записываются в виде:

$$y(0)=y_0\ ,\ \dot{y}(0)=0,\ \psi_2(0)=0,\ \dot{\psi}_2(0)=-\psi_{10} \quad (13)$$

Как следствие, вспомогательная функция ψ_2(t) зависит от одного неопределенного параметра ψ_{10} и равна $\psi_2(t) = K_\psi \exp(\varepsilon t)\cdot\sin(\omega t)$. Следовательно, оптимальное ускорение основания записывается в виде:

$$\ddot{U}(t)=-bg\cdot \mathrm{sign}(\psi_{10}\cdot\sin(\omega t)) \quad (14)$$

где параметр ψ_{10} должен определяться условием прохождения фазовой траектории через конечное значение (y_1, $\dot{y}_1$) при $t = t_q$.

Ускорение (14) определяет собой ступенчатую функцию в рамках одного периода $T_c = 2\pi/\omega$ равную $-bg\cdot\mathrm{sign}(\psi_{10})$ в полупериоде $t_k<t< t_k+\pi/\omega$ и $bg\cdot\mathrm{sign}(\psi_{10})$ в полупериоде $t_k+\pi/\omega<t<t_k+2\pi/\omega$, где $t_k = k\pi$, k = 0,1,2,… . Т. е., оптимальное ускорение представимо в виде тригонометрического ряда

$$\ddot{U}_0(t)=-(4bg\,\mathrm{sign}(\psi_{10})/\pi)\cdot \cdot\sum\sin((2k+1)\omega t)/(2k+1) \quad (15)$$

в котором суммирование производится по всем k=0,1,2… .

Определившись с оптимальным управлением $\ddot{U}_0$(t), зависящим только от одного неопределенного параметра ψ_{10} и начального экстремального смещения y_0, , будем рассматривать только амплитудные значения перемещений, т. е., экстремальные значения перемещений, для которых скорость равна нулю. Тогда задача оптимального управления будет заключаться в выборе такого ускорения, основания для которого переход из одного экстремального смещения (y_k,0) в другое ближайшее экстремальное смещение (y_{k+1},0) реализуется за кратчайшее время t_q. Так как формулы (14)-(15) соответствуют начальному экстремальному смещению $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$, то потребуем, чтобы оптимальное управление (14) переводило сооружение в другое ближайшее экстремальное смещение (y_1,0) за кратчайшее время t_q , где y_1 и t_q пока не определены.

Решение уравнения (2) для смещений и скоростей смещений с оптимальным ускорением в правой части, т. е. уравнения

$$\ddot{y}+2\varepsilon\dot{y}+\rho^2 y = bg\cdot \mathrm{sign}(\psi_{10}\cdot\sin(\omega t)) \quad (16)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0)=0$ находится по формулам

$$y(t)= y_e \mathrm{sign}(\psi_{10})+\exp(-\varepsilon t)(Q\cos\omega t+R\sin\omega t)$$
$$\dot{y}(t)=-\exp(-\varepsilon t))((\varepsilon Q-R\omega)\cos\omega t+$$
$$+(\varepsilon R+\omega Q)\sin\omega t)$$

где $y_e = bg/\rho^2$, а постоянные величины Q и R находятся из начальных условий

$$Q= y_0- y_e \mathrm{sign}(\psi_{10}),\ R=\varepsilon Q/\omega \quad (17)$$

Для того, чтобы фазовая траектория проходила через экстремальное смещение (y_1,0) за минимальное время $t_q \le \pi/\omega$ должны выполняться соотношения

$$y_e \mathrm{sign}(\psi_{10})+Q\exp(-\varepsilon t_q)\cdot$$
$$\cdot(\cos\omega t_q+(\varepsilon/\omega)\sin\omega t_q)=$$
$$=y_1,\ (\rho^2 Q/\omega)\cdot\sin\omega t_q=0$$

Для получения нетривиального решения уравнения (16), отличного от константы, должно быть $\sin\omega t_q = 0$, т. е., $\omega t_q = k\pi$, k = 0,1,… и, следовательно, с учетом ограничения на t_q минимальное время равно полупериоду колебаний $t_q = \pi/\omega$, и кроме того,

$$y_e\cdot \mathrm{sign}(\psi_{10})-Q\cdot\exp(-S))=y_1$$

где $S = \varepsilon\pi/\omega$. Отсюда, с учетом условия (17) прохождения фазовой траектории через начальное значение, получаем:

$$y_1= y_e\cdot \mathrm{sign}(\psi_{10})-(y_0- y_e \mathrm{sign}(\psi_{10}))\cdot\exp(-S) \quad (18)$$

и, кроме того, неопределенная постоянная ψ_{10} определяется через начальное значение смещений формулой $\psi_{10} = -\mathrm{sign}(y_0)$. При этом неоднородное уравнение (2) с оптимальным ускорением в правой части, т.е. уравнение (16) приводится к нелинейному относительно скорости уравнению

$$\ddot{y}+2\varepsilon\dot{y}+\rho^2 y = bg\cdot \mathrm{sign}(\dot{y}) \quad (19)$$

Из соотношения (18) вытекает формула

$$y_{k+1}=-y_e\cdot \mathrm{sign}(y_k)-$$
$$-(y_k+y_e \mathrm{sign}(y_k))\cdot\exp(-S),\ k=0,1,2,\ldots \quad (20)$$

связывающая соседние знакопеременные экстремальные смещения при воздействии оптимального ускорения основания.

Из формул (16) или (19) следует, что при достаточно малых начальных отклонениях и достаточно малом линейном затухании происходит последовательное увеличение размахов колебаний, но это нарастание колебаний не будет продолжаться бесконечно и в системе установятся незатухающие колебания с некоторой постоянной амплитудой А. Для определения этой амплитуды рассматриваются три последовательных экстремума смещений чередующихся знаков y_k, y_{k+1}, y_{k+2}. Выписывая для них два уравнения (20) и полагая $y_{k+1} = -y_k$, $y_{k+2} = y_k$, получим одно и то же уравнение

$$y_k- y_k\exp(-S)=y_e \mathrm{sign}(y_k)(1+\exp(-S))$$

откуда следует

$$y_k=y_e\cdot \mathrm{sign}(y_k)\cdot(1+\exp(-S))/(1-\exp(-S)),$$
$$A=|y_k| \quad (21)$$

Таким образом, при воздействии оптимального ускорения основания в системе «сооружение-основание» могут происходить незатухающие колебания сооружения с однозначно определенной и зависящей от свойств самой системы, а не от начальных условий, амплитудой А и круговой частотой ω свободных демпфированных колебаний сооружения.

Уравнение (19) впервые предложено в работах [1,2]. В [2] показано, что линейная динамическая система (19) является потенциально автоколебательной и построено точное решение, описывающее процесс автоколебаний – стационарный периодический процесс с периодом $T_c = 2\pi/\omega$ собственных колебаний однородного уравнения (2) и амплитудой, полученной из (21) в виде:

$$A=(bg/\rho^2)\mathrm{ctg}(\pi\varepsilon/2\omega)$$

Подставляя полученное из принципа максимума выражение (15) для внешней периодической кусочно-постоянной силы в линейное уравнение (2), найдем его решение в виде ряда

$$y(t)=(4bg/\pi)\sum(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)) \quad (22)$$

в котором суммирование производится по всем n = 0, 1, 2..., при этом, коэффициенты с четными номерами n = 2k равны нулю, а коэффициенты с нечетными номерами n = 2k+1 отличны от нуля и равны:

$$a_{2k+1}=2\varepsilon\omega(2k+1)u_{2k+1}/X_{2k+1},$$
$$b_{2k+1}= (\rho^2-(2k+1)^2\omega^2)u_{2k+1}/X_{2k+1}$$

где

$$X_{2k+1}=(\rho^2-(2k+1)^2\omega^2)^2+4\varepsilon^2(2k+1)^2\omega^2,$$
$$u_{2k+1}=1/(2k+1),\ k=0,1,2\ldots$$

Для квадратов амплитуд соответствующих обертонов $R^2_{2k+1} = a^2_{2k+1}+b^2_{2k+1}$ получаем $R^2_{2k+1} = u_{2k+1}{}^2/X_{2k+1}$

Мерой несинусоидальности периодической функции y(t), характеризующей относительную величину отклонений ее графика от синусоиды, является [8] так называемый клирфактор $\varkappa$, определяемый формулой

$$\varkappa^2=(\sum(a_{2k+1}{}^2+ b_{2k+1}{}^2))/(a_1{}^2+ b_1{}^2)$$

где суммирование производится по всем k≥1. Оценим для нашего случая клирфактор, предполагая, что ε достаточно мало. Основной резонансный тон внешней силы порождает основной тон y(t), причем, квадрат амплитуды этого тона $R^2_1 = a_1^2 + b_1^2$ равный

$$R_1=1/((\rho^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2)$$

неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. Остальные члены разложения внешней силы имеют частоты далекие от резонанса, и, поэтому, порождают движение, для которого сумма квадратов коэффициентов ряда Фурье при $\varepsilon \to 0$ стремится к конечному положительному пределу. Этот предел соответствует случаю действия нерезонансных членов на гармонический осциллятор без трения.

Отсюда ясно, что при достаточно малом ε периодическое движение сооружения имеет сколь угодно малый клирфактор, т. е. в этом случае колебания сколь угодно близки к синусоидальным

$$y(t)=(4bgR_1/\pi)\cdot \sin(\omega t-\alpha),\quad \mathrm{tg}\alpha=2\omega/\varepsilon. \tag{23}$$

Известно, что благодаря явлению резонанса сильно несинусоидальная внешняя сила при наличии линейного затухания может поддерживать в гармоническом осцилляторе колебания, весьма близкие к одному из его собственных (и, следовательно, синусоидальных) колебаний. Поэтому можно сказать, что в задаче о вынужденных колебаниях сооружения под действием оптимального ускорения при достаточно малом ε мы имеем дело с авторезонансом под действием ускорения, порождаемого движением самого сооружения.

Сейсмические воздействия для линейных уравнений

Простейшая схема сейсмического воздействия на сооружение основана, например [5,6], на допущении, что изменением спектрального состава в течение всего землетрясения можно пренебречь. Т. е., принять сейсмическое воздействие однокомпонентным, в виде некоторого заданного, нечетного в рамках одного периода, периодического ускорения с периодом T, представленного в виде разложения в ряд Фурье по синусам с коэффициентами A_n и основной круговой частотой $T = 2\pi/\theta$. В частности, при n = 1 получается гармоническое ускорение $\ddot{U} = -A_1\sin\theta t$.

Если необходимо считаться с изменением спектрального состава в течение всего землетрясения, то должно быть взято более общее двухкомпонентное сейсмическое воздействие $\ddot{U}_1+\ddot{U}_2$ с основными круговыми частотами $\theta_{1,2} = 2\pi/T_{1,2}$, $T_{1,2}$ – периоды ускорений $\ddot{U}_{1,2}$. То есть, в случае двухкомпонентного сейсмического воздействия опять приходим к уравнению колебаний типа (3).

Вообще говоря, приложение возмущающей силы вызывает также свободные колебания. Таким образом, действительное движение даже в случае однокомпонентного внешнего воздействия является сложным движением как результат сложения двух колебаний, имеющих в общем случае различные частоты, различные амплитуды и различные фазы. Если же в системе появляется отрицательное демпфирование, то положение равновесия неустойчиво, свободные колебания нарастают и процесс может привести к установлению автоколебаний.

Сложные одномерные колебания возникают с учетом собственных колебаний в случае отсутствия демпфирования и однокомпонентного сейсмического воздействия в виде $\ddot{U} = -A_1\sin\theta t$ круговая частота θ которого не совпадает с частотой ρ собственных колебаний сооружения. Хорошо известно, например [10-12], что при отсутствии демпфирования решение уравнения (2) для нулевых начальных условий имеет вид:

$$y(t)=-A_1(\sin\theta t-s\cdot\sin\rho t)/(\rho^2-\theta^2),s=\theta/\rho \tag{24}$$

Если частота θ возмущающей силы близка к частоте ρ свободных колебаний, т. е. $\rho-\theta = 2\Delta$, где Δ – малая величина то решение можно представить [11] в виде:

$$y(t)\approx-A_1\sin\Delta t\cos\theta t/(2\theta\Delta)$$

Так как Δ малая величина, то функция sinΔt меняется медленно и ее период 2π/Δ велик. В таком случае полученное приближенное решение можно рассматривать как колебание с периодом 2π/θ и переменной амплитудой $A_1\sin\Delta t/(2\theta\Delta)$. Этот вид колебаний носит название биений и период биений равный 2π/Δ увеличивается с приближением θ к ρ т. е., с приближения к условиям резонанса. Однако, этот сложный процесс колебаний (биения) не является установившемся при наличии демпфирования; вследствие положительного демпфирования после некоторого промежутка времени свободные колебания исчезают и остается только установившийся процесс вынужденных колебаний, постоянно поддерживаемый возмущающей силой.

При $\theta \to \rho$ возникает резонанс колебаний и решение (24) принимает вид:

$$y(t)=-A_1(\sin\rho t-\rho t\cdot\cos\rho t)/(2\rho^2) \tag{25}$$

Следовательно, при совпадении частот возникает флаттер – пиковые значения колебаний возрастают по линейному закону и за конечный промежуток времени не обращаются в бесконечность. Т. е., при отсутствии демпфирования система становится динамически неустойчивой и особый смысл приобретает время действия острого резонанса. Это обстоятельство дало повод автору работы [9] для данного показателя балльности и отсутствии демпфирования назвать показателем сейсмостойкости сооружения число n_a периодов колебаний, для которого перемещения становятся недопустимо большими. Это означает, что при малом демпфировании через время $T_c = 2\pi n_a/\rho$ действия землетрясения возникает аварийная ситуация, приводящая к нарушению предельных перемещений, а также к возможному нарушению прочности и / или устойчивости основных несущих элементов конструкций или устойчивости положения самого сооружения.

Но, при наличии демпфирования колебаний и воздействия особого сейсмического ускорения основания в виде $\ddot{U} = -A_1\mathrm{sign}(\dot{y})$, где $A_1 = bg$, в системе сооружение-основание возникают автоколебания [1,2] которые могут привести к указанной выше аварийной ситуации. Особые сейсмические ускорения основания будут в этом случае аварийными.

Бигармоническая структура входного воздействия

Учитывая полигармоническую структуру входного воздействия, а так же то, что динамическая система (2) реагирует лишь на те части спектра внешнего воздействия, частота которых близка к собственной частоте колебаний сооружения, выделим из внешнего воздействия две доминантные частоты $\theta_{1,2}$ наиболее близкие к собственной частоте ρ. То есть, представим сейсмическое воздействие в виде

$$\ddot{U}=-A_1\sin\theta_1 t-A_2\sin\theta_2 t,\ A_{1,2}>0,\ \ \theta_{1,2}>0 \quad (26)$$

Тогда, если $\rho<\theta_1$ и $\theta_1<\theta_2$, то в этом представлении остается лишь первое слагаемое и резонанс и острый резонанс описываются формулами (24)-(25) при $\rho=\theta=\theta_1$. В противном случае, т. е. если $\theta_1<\rho<\theta_2$ при отсутствии демпфирования и малой величине $\theta_2-\theta_1$ возникают биения и движение для нулевых начальных условий носит почти синусоидальный характер

$$y(t)=-\sum A_i(\sin\theta_i t-s_i\cdot\sin\rho t)/(\rho^2-\theta_i^2) \quad (27)$$

где $s_i=\theta_i/\rho$, i = 1,2. В общем случае, если частоты ρ, θ_i различны, то решение (27) можно представить в виде суммы двух биений

$$y(t)=\sum M_i(t)\cdot\sin(q_i t+\alpha_i),\ q_i=(\rho+\theta_i)/2 \quad (28)$$

где $M_{1,2}$ – медленно меняющиеся периодические амплитуды

$$M_i(t)=A_i\cdot(1+s_i^2-2s_i\cdot\cos(\rho-\theta_i)t)^{1/2}/(\rho^2-\theta_i^2)$$

α_i – медленно меняющиеся периодические фазы

$$tg\alpha_i=-((\rho-\theta_i)/(\rho+\theta_i))ctg((\rho-\theta_i)t/2)$$

Представляют интерес экстремальные величины смещений (27) или (28) независимо от моментов времени, когда эти смещения достигаются. Ввиду того, что классические методы определения экстремумов функций здесь трудно реализуемы, представим смещение (28) в виде:

$$y(t)=Q(t)\cdot\sin(\omega_s t+\beta) \quad (29)$$

в котором

$$Q(t)=(M_1^2+M_2^2+2M_1\cdot M_2\cos\omega_v t)^{1/2},$$
$$tg\beta=B_1/B_2$$
$$B_1=(M_1+M_2)\cos(\omega_v t/2),$$
$$B_2=(M_1-M_2)\sin(\omega_v t/2)$$
$$\omega_v=\alpha_1-\alpha_2+(\theta_1-\theta_2)/2,$$
$$\omega_s=(\rho+\alpha_1+\alpha_2+(\theta_1+\theta_2)/2)/2$$

Положим, далее,

$$\theta_1=\varphi_1\rho,\ \theta_2=(1+\varphi_2)\rho,\ \theta_1+\theta_2=2\rho,$$
$$\theta_1-\theta_2=-2\varphi_2\rho,\ q_1=(1+\varphi_1)\rho/2,$$
$$q_2=(2+\varphi_1)\rho/2,$$
$$\rho-\theta_1=\varphi_2\rho,\ \ \rho+\theta_1=(1+\varphi_1)\rho,$$
$$s_1=\varphi_1,\ s_2=1+\varphi_2$$

где φ_1 – число золотого сечения, удовлетворяющее квадратному уравнению $\varphi_2+\varphi-1=0$, т.е. $\varphi_1\approx0.618$, $\varphi_2=1-\varphi_1\approx0.382$. Тогда,

$$\omega_v=\alpha_1-\alpha_2-\rho\varphi_2,\ \omega_s=\rho+(\alpha_1+\alpha_2)/2,\ \tau=\rho\varphi_2 t$$
$$tg\alpha_1=-0.236ctg\tau/2,\ tg\alpha_2=0.678tg\alpha_1$$
$$M_1(t)=(1+\varphi_1)y_1(1+\varphi_2-2\varphi_1\cos\tau)^{1/2},$$
$$M_2(t)=-1.1y_2(2.91-2(1+\varphi_2)\cdot\cos\tau)^{1/2}$$
$$y_1=A_1/\rho^2,\ y_2=A_2/\rho^2$$

Из полученных формул следует, что фазы $\alpha_{1,2}$ и параметры ω_v, ω_s – периодические функции с периодом $T_\alpha=4\pi/(\varphi_2\rho)$, а амплитуды колебаний $M_{1,2}$ периодические функции с периодом T_M в два раза меньшим, чем период T_α, т. е. $T_M=T_\alpha/2$.

Исследуем сначала зависимую от времени величину разности фаз $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$ определяющую параметр ω_v. Используя известную формулу для тангенса разности аргументов и выражения для соответствующих тангенсов, получим выражение

$$tg\alpha=-2q ctg(\tau/2)/(1+q\cdot ctg^2(\tau/2)),\ q=0.038$$

Из полученной формулы следует, что разность фаз α обращается в нуль при sinτ = 0, т. е. при $\tau_к=к\pi$, где к = 0, 1, 2,… Для этих значений $\tau_к$ величина α = 0 $\cos\omega_v t=\cos к\pi$ и, следовательно,

$$Q_к=(M_1^2+M_2^2+2M_1\cdot M_2\cos к\pi)^{1/2},\ \cos к\pi=(-1)^к,$$

Это означает, что $Qк=M_1(к)+M_2(к)$ при всех целочисленных четных к=2n и, $Qк=M_1(к)-M_2(к)$ для всех нечетных к=2n+1. Следовательно,

$$M_1(2n)=(1+\varphi_1)\varphi_2 y_1,\ \ M_1(2n+1)=(1+\varphi_1)^2 y_1$$
$$M_2(2n)=-1.1\varphi_2 y_2,\ \ M_2(2n+1)=-1.1(2+\varphi_2)y_2$$

где n = 0,1,2,…, и, кроме того,

$$Q_{2n}=((1+\varphi_1)y_1-1.1y_2)\varphi_2,$$
$$Q_{2n+1}=(1+\varphi_1)^2 y_1+1.1(2+\varphi_2)y_2, \quad (30)$$

а коэффициенты $A_{1,2}$ остаются неотрицательными произвольными величинами, максимум которых равен bg.

Максимальное значение амплитуды Q_{2n} достигается при $y_2=0$, т. е., max $Q_{2n}=(1+\varphi_1)y_1$, а максимальное значение амплитуды Q_{2n+1} достигается при $y_2=y_1=bg$ и равно $2(2+\varphi_1)\cdot bg$. При этом, величина Q_{2n+1} при $y_2=0$ равна $(2+\varphi_1)\cdot y_1$ т. е., в два раза меньше, чем max Q_{2n+1} при $y_2=y_1=bg$.

Оценим теперь величину $\sin(\omega_s t+\beta)$ при $\tau_к=к\pi$, т. е. при $t=t_к$, где $t_к=\tau_к/(\rho\varphi_2)$, к = 2n+1. Величина фазы β находится по формуле:

$tg\beta_{2n+1}=-(D-/D+)\cdot ctg((2n+1)\pi/2)$,

где $D_\pm=(1+\varphi_1)^2y_1\pm1.1(2+\varphi_2)y_2$, n = 0,1,2, … . Из этой формулы следует, что $tg\beta_{2n+1}=0$ и независимо от параметров $y_{1,2}$ величина $\beta_{2n+1}=2\pi m$, m = 0,1,2, … . Для значений целочисленного параметра к = 2n+1 и фазы β = 0 имеем $\sin(\omega_s tк+\beta_к)=\sin(\omega_s t_к)$ где $\omega_s=\rho+\alpha_1$, $tg\alpha_1=-0.236ctg((2n+1)\pi/2)$. Отсюда следует, что $\alpha_1=0$, $\omega_s t_к=(2n+1)(2+\varphi_1)\pi$ и, кроме того,

$$y(t_{2n+1})=Q_{2n+1}\cdot\sin((2n+1)(2+\varphi_1)\pi) \quad (31)$$

т. е. приближенный максимум смещения $y(t_{2n+1})$ при $y_2=y_1=bg$ равен $2(2+\varphi_1)bg$ и достигается для значения n = 8. Максимум смещения $y(t_{2n})$ здесь не рассматривается, так как он всегда не превосходит величину $Q_{2n}=(1+\varphi_1)bg$, существенно меньшую, чем максимальное смещение $2(2+\varphi_1)bg$.

Наиболее важными параметрами реакции при проектировании сооружений являются максимальные значения относительных перемещений, относительных скоростей и абсолютных ускорений. Максимумы этих величин наступают в разные моменты времени, которые определяются на основе закономерностей колебаний (27),(29). Наиболее важным при биениях является абсолютное ускорение $\ddot{X} = \ddot{y}+\ddot{U}$, определяющее силы, действующие на сооружение [4].

При ε = 0 и нулевых начальных условиях сооружение совершает сложные колебания (биения) (27) которые могут быть записаны в виде формулы (29) с периодической амплитудой Q(t) и периодической фазой β(t). При этом абсолютные ускорения находятся по формуле

$$\ddot{X}=\sum A_i((2\theta_i^2-\rho^2)\sin\theta_i t- -\theta_i\rho\cdot\sin\rho t)/(\rho^2-\theta_i^2), i=1,2 \quad (32)$$

В случае $\theta_1 = \varphi_1\rho$, $\theta_2 = (1+\varphi_2)\rho$ из формулы (32) получается закономерность ускорений, которая при $t_к = \tau_к/(\rho\varphi_2)$ преобразуется к виду

$$\ddot{X}_к=-A_1(\varphi_2\sin(1+\varphi_1)к\pi+\sin(2+\varphi_1)к\pi)- -A_2(3.1\sin(3+\varphi_1)к\pi-1.52\sin(2+\varphi_1)к\pi) \quad (33)$$

В работах [1,2] предложено выделить аварийные сейсмические горизонтальные нагрузки в виде $\ddot{U} = -bg\cdot sign(\dot{y})$ с максимальной величиной показателя b для строительной площадки, как нагрузки, создающей аварийную ситуацию – возникновение режима автоколебаний, приводящего к нарушению прочности или устойчивости сооружения, а также к нарушению норм по оценке общей вибрации на обслуживающий персонал или оборудование.

При малом демпфировании и ничтожно малой вероятности того, что доминантная частота θ горизонтального сейсмического воздействия совпадет с частотой собственных колебаний сооружения в качестве особого сейсмического воздействия вместо $\ddot{U} = -bg\cdot sign(\dot{y})$, в качестве первого приближения можно принять нулевое демпфирование и доминантные частоты $\theta_1 = \varphi_1\rho$, $\theta_2 = (1+\varphi_2)\rho$. Тогда колебания сооружения относительно грунта будут представлять собой биения в форме (27) или (29. При этом максимальная величина абсолютных ускорений при биениях и $A_1 = A_2 = bg$ равна

$$\ddot{X}_к=-bg(3.482-0.52(-1)^к)\sin(1+\varphi_1)к\pi \quad (34)$$

Максимальные величины смещений для биений при $A_1 = A_2$ составляют $2(2+\varphi_1)y_e$ вместо величины A для аварийных сейсмических воздействий. Для этих величин смещений должно выполняться неравенство

$$\max|y(t)| \geq A \quad (35)$$

и которое в случае частот $\theta_1 = \varphi_1\rho$, $\theta_2 = (1+\varphi_2)\rho$ и $A_1 = A_2 = bg$ принимает вид

$$2(2+\varphi_1)\geq ctg(\pi\varepsilon/2\omega). \quad (36)$$

В случае знака равенства (36) выражает условие совпадения максимальных смещений для автоколебаний и для биений. Решение этого уравнения относительно коэффициента демпфирования сводится к уравнению $\pi\varepsilon/2\omega = 1+\varphi_2$, приближенное решение которого равно $\varepsilon \approx 0.66\rho$.

Обозначим через ε_0 коэффициент демпфирования, определенный для сооружения по нормам СП 14.13330-2014 или другими методами. Если при использовании коэффициента демпфирования ε_0 неравенство (36) выполняется, то за наиболее близкие частоты следует принять $\theta_1 = \varphi_1\rho$, $\theta_2 = (1+\varphi_2)\rho$, а за особое сейсмическое воздействие принять

$$\ddot{U}=-bg(\sin\varphi_1\rho t+\sin(1+\varphi_2)\rho t) \quad (37)$$

вместо воздействия $\ddot{U} = -bg\cdot sign(\dot{y})$. При этом следует требовать, чтобы максимальная величина (34) абсолютных ускорений при биениях была не менее максимальной величины абсолютных ускорений при автоколебаниях.

В противном случае, т. е., если при подстановке ε_0 неравенство (36) не выполняется, то в качестве частот $\theta_{1,2}$ следует взять более близкие к ρ частоты $\theta_1(m) = \rho\cdot\varphi_1^{1/m}$ и $\theta_2(m) = (1+\varphi_2)^{1/m}\rho)$ (при m = 2 $\theta_1 = 0.786\rho$, $\theta_2 = 1.176\rho$) и вновь проверить выполнение неравенства (35) с большей величиной максимальных смещений при биениях. Процесс уточнения наиболее близких частот $\theta_{1,2}$ для заданного коэффициента демпфирования ε_0 заканчивается для того параметра m≥1, для которого будет удовлетворено неравенство (35). При этом целочисленная величина параметра m будет служить показателем сейсмостойкости сооружения, соответствующим заданному коэффициенту демпфирования, а колебания сооружения будут представлять биения (27),(29) с абсолютным ускорением сооружения (32) в котором $A_1 = A_2 = bg$. В частности, при m = 1 абсолютное ускорение находится по формуле (34).

И в предыдущей и в последней редакциях СП 14.13330.2014 сводов правил для строительства в сейсмических районах выдвинуто требование о том, что при выполнении расчетов сооружений следует использовать две расчетные ситуации – ПЗ (проектное землетрясение) и МРЗ (максимальное расчетное землетрясение). Расчеты на ПЗ следует выполнять для всех зданий и сооружений, а расчеты на МРЗ следует применять только для специальных зданий и сооружений.

Целью расчетов на воздействие ПЗ является предотвращение частичной или полной потери эксплуатационных свойств сооружением и оно представляет собой наиболее сильное землетрясение, которое может произойти на площадке строительства с повторяемостью один раз в 100 или 500 лет. Целью расчетов на воздействие МРЗ является предотвращение глобального обрушения или его частей, создающее угрозу безопасности людей. Оно представляет собой землетрясение максимальной интенсивности на площадке строительства с повторяемостью один раз в 1000 или 5000 лет, или, по терминологии А. Н. Бирбраера [3], наиболее сильное землетрясение, вообще потенциально возможное на данной площадке.

Как предложено в [2], МРЗ должно соответствовать автоколебаниям сооружения (возникновению острого резонанса (авторезонанса), соответствующим аварийному сейсмическому воздействию $\ddot{U} = -bg\cdot sign(\dot{y})$ с максимальной расчетной сейсмичностью (показателя b) площадки строительства. Взамен предложения сформулированного в работе [2] предлагается, что МРЗ должно соответствовать аварийному сейсмическому воздействию

$$\ddot{U}=-bg(\sin\theta_1(m)t+\sin\theta_2(m)t) \quad (38)$$

с максимальной расчетной сейсмичностью b и показателем сейсмостойкости сооружения m определенным выше итерационной процедурой с использованием заданного коэффициента демпфирования для автоколебаний и использованием неравенства (35).

В результате выделяются особые и аварийные сейсмические горизонтальные нагрузки в приведенном виде (38) с максимальной величиной показателя b для строительной площадки и нулевым демпфированием. Аварийные нагрузки выделяются из особых как нагрузки, создающие аварийную ситуацию – возникновение режима биений, приводящих к нарушению прочности или устойчивости сооружений, или к нарушению норм по оценке общей вибрации на обслуживающий персонал и оборудование.

Выводы и рекомендации

1. Предложены способы определения особых и аварийных сейсмических нагрузок, отсутствующих в СП 14.13330-2014 и требуемых п.6 статьи 16 Федерального закона №384-ФЗ. Уточнен приведенный в работе [2] способ, основанный на описании движений сооружения с помощью нелинейных уравнений и на существовании для этих уравнений устойчивых предельных циклов, приводящих к возникновению стационарных периодических решений–автоколебаний. Показано, что задача выбора особого (аварийного) сейсмического воздействия, предложенного в работе [2] сводится к задаче оптимального быстродействия, когда переход из одного крайнего положения сооружения в другое крайнее положение при внешнем воздействии совершается за минимальное время.
2. Как предложено в работе [2] максимальное расчетное землетрясение (МРЗ) должно соответствовать автоколебаниям сооружения (возникновению острого резонанса по [9]) и вызываться сейсмической силой, постоянной по модулю и меняющей знак на противоположный при экстремальных значениях смещений сооружения. Взамен предложения, сформулированного в работе [2], предлагается, что МРЗ должно соответствовать нулевому демпфированию и расчетному аварийному гармоническому сейсмическому воздействию (38) с аварийными частотами, близкими, но в отличие от [9], не совпадающими с частотой собственных колебаний сооружения.
3. Приведен алгоритм определения частот особых сейсмических воздействий, а также аварийных нагрузок, как нагрузок, создающих аварийную ситуацию–возникновение режима биений, приводящих к нарушению прочности или устойчивости сооружений. Алгоритм определения аварийных частот косвенно учитывает влияние демпфирования на колебания сооружения и основан на сопоставлении максимальных перемещений сооружений, возникающих при биениях и автоколебаниях.

Литература

1. Востров В.К. Аварийные расчетные ситуации и механическая безопасность строительных конструкций//Журнал нефтегазового строительства.2015.№ 3.С. 39-47.
2. Ведяков И.И., Востров В.К. Аварийные расчетные ситуации и аварийные сейсмические нагрузки//Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений.2016.№5.С. 33-37.
3. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. С.-П.: Наука, 1998.256 с.
4. Окамото Ш. Сейсмостойкость инженерных сооружений. М.: Стройиздат,1980.342 с.
5. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука,1979.335 с.
6. Ньюмарк Н., Розенблюэт Э. Основы сейсмостойкого строительства. М.: Стройиздат, 1980. 344 с.
7. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Том II. М.: Наука,1988.575с.
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука,1981. 568 с.
9. Леонов М.Я. Острый резонанс за пределами упругости при сейсмических колебаниях простейших сооружений// Известия АН Киргизской ССР.1974.№ 5. С. 61- 66.
10. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
11. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука,1967. 444 с.
12. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.777 с.

Материалы хранятся по адресу:
109428, Москва, ул. 2-я Институтская, 6, стр. 37
109456, а/я 29, г. Москва,
Тел./факс: (499) 174-75-82

VEDYAKOV I., PhD in Engeneering, Professor (Scientific Research institute named after Kucherenko)
VOSTROV V., PhD in Engeneering (Kimrsk Institute VNIPImorneftegaz)

THE MAXIMUM PRINCIPLE OF PONTRYAGIN AND EMERGENCY SEISMIC LOADS

Abstract

The work proposes the methods for determining special and emergency seismic loads and emergency calculation situations required in accordance with the current legislation. It is refined the previously proposed way of describing the structure movements with the help of nonlinear ordinary differential equations and the existence of stable limit cycles for them, leading to the appearance of stationary periodic solutions-self-oscillations. It is shown that the task of selecting a special (emergency) seismic action is reduced to the task of optimal speed, when the transition from one extreme position of the structure to another with external seismic action takes place in a minimum time. A proposal was made to apply special (emergency) harmonic seismic actions with a special frequency close to the natural oscillation frequency of the structure as a maximum design earthquake in seismic regions. Emergency seismic horizontal loads are allocated as loads that create an emergency situation. An algorithm for determining the special frequency of emergency seismic actions is presented. It is based on the comparison of the maximum displacements of structures arising from beats and self-oscillations.

Keywords: *emergency situation, auto-oscillations, acute resonance, optimal control, seismic action, emergency loads, special frequencies, beating of structures.*

References

1.Vostrov V.K. Avariinyie raschetnyie situatsii I mekhanicheskaia bezopasnost stroitelnyh konstruktsii//Zhurnal neftegazovogo stroitelstva.2015/№3.S.39-47.

2.Vedyakov I.I., Vostrov V.K. Avariinyie raschetnyie situatsii i avariinyie seismicheskie nagruzki//Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezop astnost'sooruzhenii.2016.№5.S.33-37.

3.Birbraer A.N. Raschet konstruktsii na seismostoikost'.S-P.: Nauka, 1998. 256 s.

4.Okamoto Sh. Seismostoikost' inzsenernyh sooruzhenii. M.: Stroiizdat, 1980. 342 s.

5.Bolotin V.V. Sluchainye kolebaniia uprugich system.M.: Nauka, 1979.335 s.

6.Niumark N., Rozenbluet E. Osnovy seismostoikogo stroitel'stva.M.: Stroiizdat, 1980. 344 s.

7.Pontryagin L.S. Izbrannye nauchnye trudy. Tom II. M.: Nauka, 1988. 575 s.

8.Andronov A.A., Vitt A.A., Chaikin S.E.Teoriia kolebanii. M.: Nauka, 1981. 568 s.

9.Leonov M.Ya. Ostryi resonans za predelami uprugosti pri seismicheskich kolebaniiah prosteishich sooruzhenii//Izvestiia AN Kirgizskoi SSR.1974. № 5. S.61-66

10.Magnus K. Kolebaniia.Vvedenie v issledovanie kolebatel'nyh system.M.: Mir, 1982. 304 s.

11.Timoshenko S.P. Kolebaniia v inzhenernom dele. M.: Nauka, 1967. 444 s.

12.Kauderer G. Nelineinaia mekhanika. M.: Izd-vo inostr. lit-ry, 1961. 777 s.

Для цитирования: Ведяков И.И., Востров В.К. Принцип максимума Л.С. Понтрягина и аварийные сейсмические нагрузки // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. № 1. С. 24-32.

For citation: Vedyakov I.I., Vostrov V.K. The maximum Principle of Pontryagin and Emergency Seismic Loads // Earthquake engineering. Constructions safety. 2018. № 1. C. 24-32.